Обучение семиклассников осознанному усвоению содержания, формулировок и доказательств теорем

Абубикерова Гульнара Ильдусовна

Россия, г. Астрахань, ГБОУ АО «Астраханская лингвистическая гимназия»

Обоснована необходимость разработки заданий, выполнение которых приводит к пониманию содержания теорем непосредственно перед их доказательством. Это приводит к непроизвольному усвоению содержания теорем, запоминанию их формулировок.

Преподавание геометрии в школе играет особую роль в умственном воспитании детей. Это единственный школьный курс, имеющий вполне дедуктивный характер. Даже школьная алгебра не может сравниться с этим предметом в данном отношении. Конечно, и в курсе геометрии в школе не все доказывается совершенно строго, и в ряде случаев при доказательствах мы используем жизненные представления вместо точных теоретических обоснований. Но несмотря на это, геометрия обеспечивает логическое развитие учащихся. Под правильным преподаванием здесь имеется в виду такое преподавание, в котором ни одна теорема, доказываемая в учебнике, не остается без доказательства в изложении учителя и учащихся. Особое внимание необходимо уделять задачам на построение. Следует считать обязательным требование, чтобы каждый ученик свободно владел алгоритмами решения следующих задач на построение циркулем и линейкой, о которых говорится в стандарте образования: деление отрезка пополам, построение треугольника по трем сторонам, построение перпендикуляра к прямой, построение биссектрисы, деление отрезка на n равных частей. К этому нужно добавить умение строить угол, равный данному, а также построение третьего пропорционального к двум отрезкам и четвертого пропорционального к трем отрезкам. Добиваться этого можно, помещая эти задачи в математические диктанты.

Теоремы бывают разных видов. Совершенно особо выглядят теоремы существования, формулируемые так: «существует объект, имеющий данные свойства: $\exists x A(x)$».

Теорема 19.1. Серединный перпендикуляр отрезка является геометрическим местом точек, равноудаленных от концов этого отрезка. [3, с. 125].

Теоремы единственности: «существует только один объект, обладающий данным свойством». **Теорема 5.1.** Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну. [3 , с. 35].

В большинстве теорем школьного курса математики доказываются свойства или признаки тех или иных объектов. Строение этих теорем таково: если верно высказывание A(x), то верно высказывание B(x), т. е. ($\forall x \in$M(A(x)$\Rightarrow$B(x)).

Например, теорема о вертикальных углах может быть прочтена таким образом: для любых двух углов, если верно, что эти углы вертикальные, то верно, что эти углы равны. Или короче: для любых двух углов, если углы вертикальные, то они равны.

В теоремах можно выделить три части:

разъяснительную часть ($\forall x \in$M), показывающую, на каком множестве рассматривается теорема;

условие A(x), показывающее, что известно об объекте x;

заключение B(x), показывающее, что требуется доказать.

Если A$\Rightarrow$B, то A называется достаточным свойством для B, а B – необходимым свойством для A.

Если у теоремы поменять местами условие и заключение, сохраняя разъяснительную часть, то получится обратная теорема. Именно, для теоремы $\forall x \in$M(A(x)$\Rightarrow$B(x)) обратной является теорема $\forall x \in$M(B(x)$\Rightarrow$A(x)). Например, для теоремы о накрест лежащих углах: **Теорема 14.2**. Если сумма односторонних углов. Образующихся при пересечении двух прямых секущей, равна 180^{o}, то прямые параллельны [3, с. 89].Обратная ей будет **Теорема 15.2.(обратная теореме 14.2.)** Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма углов, образующих пару односторонних углов, равна 180[3 , с. 97].

Если у теоремы заменить условие и заключение их отрицаниями, сохраняя разъяснительную часть, то получится противоположная теорема. Именно, для теоремы $\forall x \in$M (A(x)$\Rightarrow$B(x)) противоположной является теорема $\forall x \in$M($\neg$A(x)$\Rightarrow \neg$B(x)). Например, для теоремы о накрест лежащих углах **Теорема 14.1**: Если два внутренних или два внешних накрест лежащих угла, образованных при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны [3 , с. 88], противоположная теорема выглядит так **Теорема 15.1**: Если две параллельные прямые пересечены секущей, то пары внутренних или пары внешних накрест лежащих углов равны [3, с. 96].

Бывает, что исходная теорема A⇒B верна, а обратная и противоположная теоремы не верны. Поэтому прежде чем начать доказывать теоремы, нужно сначала поработать над формулировкой теорем, уяснением их содержания, так как учащимся необходимо иметь представление, о чем идет речь в целом, чтобы они сами приходили к нужным выводам. Выше мы рассмотрели, какие теоремы преподаются в 7 классе за первое полугодие. А теперь попытаемся понять, как нужно отрабатывать формулировки. Для этого сначала на листе А4 изображаются рисунки, на которых наглядно показаны правильные и неправильные иллюстрации формулировки теоремы, а затем задаются вопросы по тексту теоремы. Учащиеся, глядя на чертежи, пытаются сопоставить каждый чертеж с изучаемой теоремой, на основании чего делается выбор рисунка, правильно отображающего содержание теоремы. Учитель использует и контрпримеры – на таких рисунках не отражено или неправильно отражено что-то из условия теоремы. Это делается для того, чтобы учащиеся сопоставляли данные на рисунке элементы с данными в тексте теоремы. В процессе такой работы учащиеся, формулируя ответы, лучше усваивают смысл той или иной изучаемой теоремы.

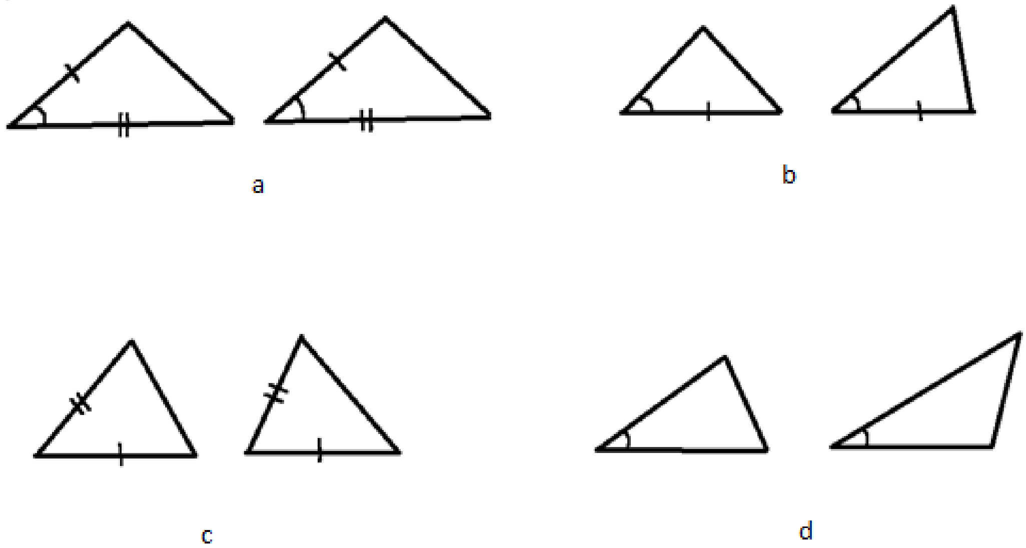
В качестве примера приведем теорему о первом признаке равенства треугольников [1, с. 53].

Теорема 8.1. (Первый признак равенства треугольников). Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Предлагаем учащимся внимательно посмотреть на рисунки 8.1 и выделить те из них, которые соответствуют формулировке теоремы.

На одном из рисунков (8.1а) изображена иллюстрация теоремы о первом признаке равенства треугольников, и можно на основании этой иллюстрации провести рассуждения, приводящие к выводу о равенстве треугольников. На других же рисунках какие-либо из условий теоремы о I признаке равенства треугольников нарушены: на одном (8б) нет равенства второй пары соответственных сторон, на другом – нет равенства углов между двумя парами соответственно равных сторон (8c), на третьем (8d) – только одна пара равных углов.

Теорема 8.1



Эта работа проводится для того, чтобы учащиеся уяснили, что нарушение какого-то условия в формулировке теоремы не приводит к справедливости заключения. Учащиеся, проанализировав рисунки, отчетливо это видят. Они самостоятельно приходят к выводу, что полностью отражает содержание теоремы лишь рис. 8.1а. *Судя по условию теоремы равенство двух сторон и угла между ними дает нам равенство треугольников.*

(Когда отработана формулировка теоремы, можно приступать к доказательству. Равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ будем обозначать так: Δ ABC = Δ $A_1B_1C_1$. Оказывается, что равенство двух треугольников можно установить, сравнивая некоторые их элементы. Доказательство теоремы производится на доске по частям и записывается учащимися в тетрадях. Для закрепления доказательства ставится вопрос: “На какие знания мы опирались в доказательстве теоремы?”, “Облегчит ли полученный признак решение задач на равенство треугольников?”, “Из равенства треугольников будет ли следовать равенство соответственных сторон и соответственных углов?”.

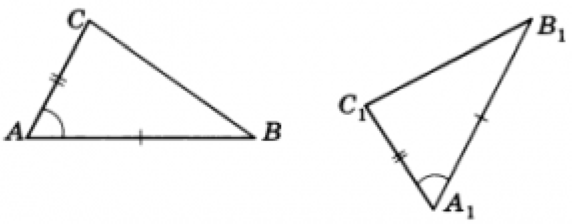


Рис. 1. Иллюстрация теоремы о первом признаке равенства треугольников

Дано:

AB = A_1B_1, AC = A_1C_1 $\angle$ A = $\angle$ A_1

Доказать:

Δ ABC = Δ $A_1B_1C_1$.

Доказательство.

Отработав формулировку теоремы на чертежах, начинаем доказательство.

Доказательство

- Вспомним определение равных треугольников.

[Два треугольника называются равными, если их можно совместить наложением.]

- Так и поступим: будем накладывать Δ ABC на Δ $A_1B_1C_1$. Теперь нужно решить, с чего начать: Накладывать сразу весь треугольник или сначала одну сторону?

[Конечно, сначала одну сторону. Это легче.]

- И еще вопрос: сразу накладывать сторону или сначала вершину?

[Сначала вершину треугольника.]

- Обязательно обратите внимание, в ходе доказательства необходимо четко различать, какие элементы треугольника совпадают благодаря наложению

(мы их занумеруем), а какие – по условию теоремы. Будем накладывать Δ ABC на Δ $A_1B_1C_1$ так, чтобы

1) точка A совместилась с точкой A_1;

2) луч AC прошел по лучу A_1C_1.

Что можно сказать про точку C?

[Так как $AC = A_1C_1$, то точка C совпадает с точкой C_1.]

- Правильно. Так как $\angle$ A = $\angle A_1$ по условию, то мы можем наложить

Δ ABC на Δ $A_1B_1C_1$ Так, чтобы: 3) луч AB прошел по лучу A_1B_1.

Что происходит дальше?

[Так как $AB = A_1B_1$, то точка B совпадет с точкой B_1. И сторона BC совпадет со стороной B_1C_1..]

- Почему? Точка B совпала сточкой B_1, точка C совпала сточкой C_1, а через две точки можно провести только одну прямую – есть такое утверждение. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместились, значит они равны по определению равных треугольников. Теорема доказана.

После доказательства задаются вопросы.

- Всегда ли нам удаётся реально совместить треугольники?

Действительно, иногда совместить треугольники нет возможности.

- Что же делать?

Поставленный вопрос подразумевает сравнение треугольников. Ясно, что наложение треугольников невозможно, появляется потребность сравнения отдельных элементов.

- Все шесть элементов треугольников надо сравнить?

Достаточно сравнить лишь три элемента одного треугольника с тремя элементами другого треугольника.

- Какие, например?

Вот тут нам на помощь придут признаки равенства треугольников, они нам расскажут, какие именно элементы нужно сравнивать.

- Что такое признак равенства треугольников и сколько существует признаков?

Условия, при которых два данных треугольника оказываются равными, называются признаками равенства треугольников. Можно сказать, что признак – это примета, по которой можно узнать те или иные свойства фигур.

- О каких элементах для сравнения мы будем сегодня говорить?

Далее применяем доказанную теорему к решению задач.

При построении чертежей целесообразно использовать цветные мелки. Работа в классе, один ученик работает у доски, остальные с места помогают решить задачу.

Задача № 173 [2, с. 58]. Даны ΔACB и $\Delta A_1C_1B_1$,где $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$, $AP = A_1P_1$. Докажите равенство ΔBPC и $\Delta B_1P_1C_1$.

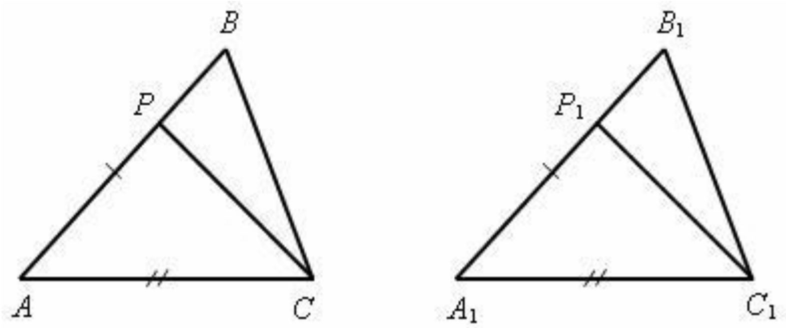


Рис.2. Иллюстрация условия задачи № 173

Дано: ΔACB и $\Delta A_1C_1B_1$; $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$;

$\angle A = \angle A_1$; $AP = A_1P_1$.

Доказать: $\Delta BPC = \Delta B_1P_1C_1$.

Доказательство

Рассмотрим ΔACB и $\Delta A_1C_1B_1$:

$AB = A_1B_1$ (по условию), $AC = A_1C_1$ (по условию), $\angle A = \angle A_1$ (по условию), тогда $\Delta ACB = \Delta A_1C_1B_1$ (первый признак, треугольники равны по двум сторонам и углу между ними).

Отсюда $BC = B_1C_1$ и $\angle B = \angle B_1$.

По условию $AB = A_1B_1$ и $AP = A_1P_1$, тогда и $PB = P_1B_1$ как разности двух пар соответственно равных отрезков

Рассмотрим ΔBPC и $\Delta B_1P_1C_1$:

$BC = B_1C_1$

$PB = P_1B_1$ $\Rightarrow$ $\Delta BPC = \Delta B_1P_1C_1$ (первый признак, треугольники равны по двум сторонам и углу между ними).

$\angle B = \angle B_1$

Литература

1. Атанасян Л.С. Геометрия. 7-9 классы.   2-е изд. — М., 2014. — 384 с.
2. Левитас Г.Г. Методика преподавания математики в основной школе: учебное пособие. — Астрахань: Изд-во АГУ, 2008.
3. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Геометрия: учебник для 7 класса. — М.: Вентана-Граф, 2012. — 192 с.