

БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СУРГУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет управления

Кафедра высшей математики и информатики

Направление подготовки 38.03.03-Управление персоналом

Квалификация – бакалавр (срок обучения – 4 года)

КОНСПЕКТ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

Тема: «Интегрирование по частям в неопределенном интеграле»

Формируемые компетенции:

Компетенция	Содержание компетенции	Тип
владением культурой мышления, способностью к восприятию, обобщению и экономическому анализу информации, постановке цели и выбору путей ее достижения; способность отстаивать свою точку зрения, не разрушая отношения (ОПК-6)	знание основных понятий, положений и методов математики	знаниевый
	иметь представление о применении аппарата математики при изучении и качественном описании реальных процессов и явлений	ориентировочный
	владение математическими методами и инструментами решения задач в своей профессиональной деятельности	операциональный
	иметь опыт применения математических методов анализа теоретического и экспериментального исследования, и решения практических задач	опыт

Цели занятия:

Образовательные:

1. Выработать обобщенный способ интегрирования по частям в неопределенном интеграле.
2. Применять выработанный способ при решении учебных задач.

Воспитательные:

1. Формирование интереса к изучаемой дисциплине и будущей профессии.

Развивающие:

1. Способствовать формированию умений самостоятельного анализа нового учебного материала.

2. В целях развития интеллекта и мышления добиваться умения выделять главное в изучаемом материале.
3. Способствовать умений анализировать выполненную работу.

Методы, применяемые на занятии: методы стимулирования и мотивации учебно-познавательной деятельности, деятельностный подход, проблемное изложение, эвристическая беседа.

Время: 2 академических часа

Место проведения: учебная аудитория с мультимедийным обеспечением (проектор, экран, ПК или ноутбук для преподавателя).

Учебно-материальное обеспечение: мультимедийная презентация, раздаточный материал «Что такое интеграл и зачем мне знать это?»; информационный лист по теме «Интегрирование по частям», цветные карточки метаплана для обобщения способа действия, карточки для групповой и индивидуальной работы студентов, оценочные листы подгрупп.

Библиографические источники, использованные при подготовке занятия

Основная литература

- 1) Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 1-й курс: с контрол. работами: линейная алгебра, аналит. геометрия, основы математ. анализа, комплекс. числа [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / К.Н. Лунгу [и др.]. - 9-е изд. - М.: Айрис-пресс, 2011. - 574с. - (Высшее образование).
- 2) Сборник задач по высшей математике [Текст]: учеб. пособие для бакалавров: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по направлениям и специальностям в области техники и технологии: в 2 ч. Ч. 2 / [В.Н. Земсков и др.]; под ред. А.С. Поспелова. - М.: Юрайт, 2012. - 611 с. - (Бакалавр). - Гриф МО.
- 3) Шипачев В. С. Высшая математика: [Электронный ресурс]: Учебник / В.С. Шипачев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 479 с. - Доступ с сайта электронно-библиотечной системы Znanium.com. - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469720>. – Загл. с экрана.

Дополнительная литература

- 4) Данилов Ю. М. Математика: [Электронный ресурс]: Учебное пособие / Ю.М. Данилов, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 496 с.- Доступ с сайта электронно-библиотечной системы Znanium.com. - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=471655>. – Загл. с экрана.
- 5) Суханова, Н. В. Математика [Текст]: учеб.-метод. пособие по организации самостоят. работы студентов: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по направлению подгот. 080200.62 - Менеджмент, 080400.62 - Управление персоналом (квалификация (степень) "бакалавр") / Н. В. Суханова ; Департамент образования и молодеж. политики ХМАО-Югры, ГОУ ВПО ХМАО-Югры "Сургут. гос. пед. ун-т ". - Сургут: РИО СурГПУ, 2013. - 182 с.
- 6) Шершнев В. Г. Математический анализ: сборник задач с решениями: [Электронный ресурс] : Учебное пособие / В.Г. Шершнев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 164 с.- Доступ с сайта электронно-библиотечной системы

Интернет ресурсы

- 7) Сайт Игоря Гладкобородова «Теория и практика» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://theoryandpractice.ru/posts/842-chto-takoe-integral-i-zachem-mne-znat-eto> (дата обращения: 8.05.16)
- 8) Сервис «Построение графиков функций онлайн» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.yotx.ru/> (дата обращения: 8.05.16)

ПЛАН и КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЗАНЯТИЯ

1. Организационный этап занятия.

Название этапа	Продолжительность, мин.	Деятельность преподавателя	Средства обучения	Деятельность студентов
Организационный этап	3	<ul style="list-style-type: none"> • здоровается со студентами; • формирует рабочие подгруппы по 4 студента; • отмечает в журнале отсутствующих студентов. 	титульный слайд презентационного материала к занятию	<ul style="list-style-type: none"> • здороваются с преподавателем; • организуют работу в подгруппах;

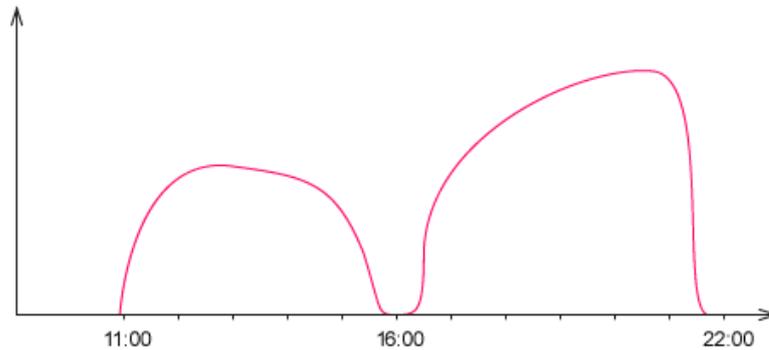
2. Мотивация деятельности студентов.

Название этапа	Продолжительность, мин.	Деятельность преподавателя	Средства обучения	Деятельность студентов
Мотивационный этап	10	<ul style="list-style-type: none"> • предлагает студентам прочитать раздаточный материал «Что такое интеграл и зачем мне знать это?» с целью определения тематических рамок учебной деятельности; • организует обсуждение содержания раздаточного материала для актуализации требований к студенту со стороны учебной деятельности и создания условий возникновения внутренней потребности включения в эту деятельность 	раздаточный материал «Что такое интеграл и зачем мне знать это?», дискуссия	<ul style="list-style-type: none"> • читают раздаточный материал, • обсуждают прочитанный материал в подгруппах; • отвечают на поставленные вопросы.

Раздаточный материал **Что такое интеграл и зачем мне знать это?** [7]:

«Я - Игорь Гладкобородов. Представьте, что у нас есть какая-то функция зависимости чего-то от чего-то.

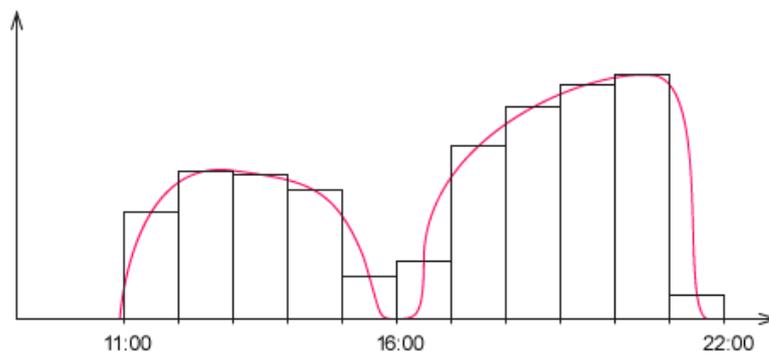
Вот так примерно можно на графике представить скорость моей работы в зависимости от времени суток:



Скорость я измеряю в количестве строк в минуту, поскольку в реальной жизни я программист.

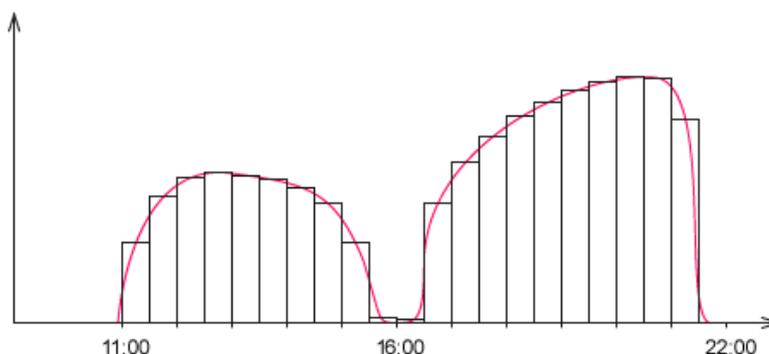
Объем работы — это скорость работы умножить на время. То есть если я пишу 3 строки в минуту, то в час получается 180. Если у нас есть такой график, можно узнать, сколько работы я сделал за день: это площадь под графиком. Но как это посчитать?

Разделим график на столбики равной ширины величиной в час. А высоту этих столбиков сделаем равной скорости работы в середине этого часа.



Площадь каждого столбика по отдельности легко посчитать, надо умножить его ширину на высоту. Получается, что площадь каждого столбика — это сколько примерно я работы сделал за каждый час. А если просуммировать все столбики, то получится примерная моя работа за день.

Проблема в том, что результат получится примерный, а нам нужно точное число. Разобьем график на столбики по полчаса:



На картинке видно, что это уже гораздо ближе к тому, что мы ищем.

Так уменьшать отрезки на графике можно до бесконечности, и каждый раз мы все ближе и ближе будем подходить к площади под графиком. А когда ширина столбиков будет стремиться к нулю, тогда сумма их площадей будет стремиться к площади под графиком. Это и называется интегралом и обозначается вот так:

$$\int_a^b f(x)dx$$

В этой формуле $f(x)$ означает функцию, которая зависит от величины x , а буквы a и b — это отрезок, на котором мы хотим найти интеграл.

Зачем это нужно?

Ученые стараются все физические явления выразить в виде математической формулы. Как только у нас есть формула, дальше уже можно при помощи нее посчитать что угодно. А интеграл — это один из основных инструментов работы с функциями.

Например, если у нас есть формула круга, мы можем при помощи интеграла посчитать его площадь. Если у нас есть формула шара, то мы можем посчитать его объем. При помощи интегрирования находят энергию, работу, давление, массу, электрический заряд и многие другие величины».

3. Этап актуализации и пробного учебного действия

Название этапа	Продолжительность, мин.	Деятельность преподавателя	Средства обучения	Деятельность студентов
Актуализация и пробное учебное действие	12	задает вопросы, опираясь на уже имеющиеся знания у студентов с целью организации осознания ими внутренней потребности к построению учебного действия и фиксирование каждым из студентов индивидуального затруднения в пробном действии	слайд 2 и 3 презентации занятия, обсуждение	<ul style="list-style-type: none"> • отвечают на поставленные вопросы, • попытались самостоятельно выполнить задание на применение нового знания, запланированного для изучения на данном занятии; • зафиксировали возникшее затруднение в выполнении пробного действия

Если все-таки завершить решение задачи, которую осветил в интернет-ресурсе [7] автор, то необходима функция $f(x)$, график которой изображен в раздаточном материале. С помощью интернет-сервиса «Построение графиков функций онлайн» можно подобрать необходимую функцию. Например, это может быть функция $f(x)=(x+1)\sin x$, график которой изображен на рисунке 1. Мы воспользуемся этим графиком на отрезке $[-3;3]$.

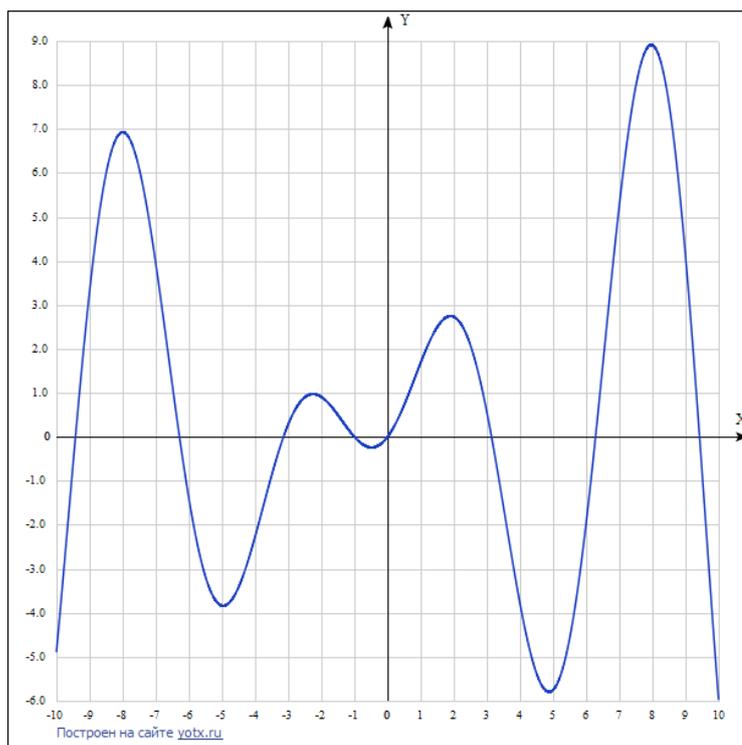


Рис. 1

Таким образом, задача сводится к расчету объема работы по формуле

$$\int_{-3}^3 (x + 1) \sin x dx.$$

Процесс вычисления составленного определенного интеграла сводится к поиску первообразной, которую задаёт неопределенный интеграл $\int (x + 1) \sin x dx$.

Предлагаем найти данный интеграл.

4. Этап выявления места и причины затруднения

Название этапа	Продолжительность, мин.	Деятельность преподавателя	Средства обучения	Деятельность студентов
Выявление места и причины затруднения	5	<ul style="list-style-type: none"> • задает вопросы для анализа студентами возникшей ситуации и на этой основе выявляет место и причины затруднения; • помогает студентам осознать то, в чем именно состоит недостаточность их знаний, умений или способностей 	дискуссия	<ul style="list-style-type: none"> • отвечают на поставленные вопросы; • анализируют шаг за шагом с опорой на знаковую запись, что и как они делали; • выявляют операцию, шаг, на котором возникло затруднение (место

				затруднения); • соотносят свои действия на этом шаге с изученными способами и фиксируют, какого знания или умения недостает для решения поставленной задачи (задача такого класса или типа вообще) (причина затруднения).
--	--	--	--	--

Задание 1: Вычислить неопределенный интеграл $\int (x + 1) \sin x dx$.

Известными студентам способами данный интеграл вычислить не получается.

Поскольку задание для студентов является новым и подобрано так, что с помощью имеющихся знаний и умений его решить нельзя, тогда у них возникает информационный дефицит.

5. Этап построения проекта выхода из затруднения

Название этапа	Продолжительность, мин.	Деятельность преподавателя	Средства обучения	Деятельность студентов
Построение проекта выхода из затруднения	5	<ul style="list-style-type: none"> • задает вопросы для постановки целей учебной деятельности студентов; • формулирует вместе со студентами тему занятия; • обсуждает со студентами выбор способа построения нового знания (метод дополнения) и средства для построения нового знания (изучение информационного листа). 	дискуссия	<ul style="list-style-type: none"> • отвечают на поставленные вопросы; • формулируют конкретную цель своих учебных действий, устраняющих причину возникшего затруднения (то есть определяют, какие знания им нужно построить и чему научиться); • предлагают тему занятия, которую педагог может

				уточнить; • записывают тему занятия в тетрадь; • выбирают способ построения нового знания и средства для построения нового знания.
--	--	--	--	--

6. Этап реализации построенного проекта

Название этапа	Продолжительность, мин.	Деятельность преподавателя	Средства обучения	Деятельность студентов
Реализация построенного проекта	15	<ul style="list-style-type: none"> • предоставляет недостающую студентам информацию в форме информационных листов по теме «Интегрирование по частям»; (можно использовать учебник); • строит образ результата выполнения действия интегрирования по частям в неопределенном интеграле (Что должны получить в результате выполнения действия? Каким свойством должен обладать результат?) • с помощью метаплана техники обобщает построенные рабочими подгруппами способы действий интегрирования по частям в неопределенном интеграле; • выполняет оценку рабочих подгрупп по 	информационный лист по теме «Интегрирование по частям», дискуссия	<ul style="list-style-type: none"> • запрашивают недостающую информацию и изучают информационный лист по теме «Интегрирование по частям»; • отвечают на поставленные вопросы при построении образа результата выполнения действия (первообразная; её производная должна равняться подынтегральной функции); • на основе разобранных примеров в информационном листе рабочие подгруппы с помощью метаплана самостоятельно вырабатывают способ действий

		<p>построению способа действия интегрирования по частям, в соответствии с представленными критериями оценочных листов;</p> <ul style="list-style-type: none"> • предлагает применить построенный обобщенный способ интегрирования по частям в неопределенном интеграле при решении задачи, вызвавшей затруднение (задание 1); • организует самопроверку решения задания 1 в соответствии с критериями оценочного листа. 	<p>интегрирования по частям в неопределенном интеграле;</p> <ul style="list-style-type: none"> • представляют выработанные в подгруппах способ интегрирования по частям в метаплане на доске с комментариями одного студента из подгруппы; • заполняют оценочного листа в соответствии с оценкой педагога задания «Способ»; • применение обобщенного всей группой способа действия при решении задачи, вызвавшей затруднение (задание 1); • самопроверка решения задание 1 в соответствии с критериями оценочного листа; • заполняют оценочного листа с учетом самопроверки.
--	--	---	---

Информационный лист по теме “Интегрирование по частям”

Метод интегрирования по частям решает очень важную задачу, он позволяет интегрировать некоторые функции, отсутствующие в таблице, **произведение** функций, а в

ряде случаев – и частное. Как мы помним, нет удобной формулы: ~~$\int uv dx = \int u dx \cdot \int v dx$~~ .

Зато есть такая: $\int u dv = uv - \int v du$ – формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла, а для определенного:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Суть метода интегрирования по частям в следующем: если подынтегральная функция может быть представлена в виде произведения двух непрерывных функций (каждая из которых может быть как элементарной функцией, так и композицией), то для неопределенного интеграла идея метода замены заключается в том, чтобы сложное выражение (или некоторую функцию) заменить одной буквой (переменной). После того, как подобрали замену, нужно найти дифференциал этой переменной, выразить дифференциал исходной переменной через новую переменную и в интеграле перейти от начальной переменной к новой, после вычисления интеграла, вернуться к исходной переменной.

Пример 1. Вычислить неопределенный интеграл $\int x \sin(3x-2) dx$.

Решение:

Используем формулу интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$.

Пусть $u = x$, $dv = \sin(3x-2) dx$. Тогда $v = \int \sin(3x-2) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x-2)$, $du = dx$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int x \sin(3x-2) dx &= x \left(-\frac{1}{3} \cos(3x-2)\right) - \int \left(-\frac{1}{3} \cos(3x-2)\right) dx = \\ &= -\frac{1}{3} x \cos(3x-2) + \frac{1}{3} \int \cos(3x-2) dx = -\frac{1}{3} x \cos(3x-2) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sin(3x-2) + C = \\ &= \frac{1}{9} \sin(3x-2) - \frac{1}{3} x \cos(3x-2) + C. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int e^x \sin x dx$.

Решение:

Используем интегрирование по частям: $\int u dv = uv - \int v du$.

Полагаем $u = e^x$, $dv = \sin x dx$. Тогда $du = e^x dx$, $v = \int \sin x dx = -\cos x$ и интеграл записывается в виде

$$\int e^x \sin x dx = e^x \cdot (-\cos x) - \int e^x \cdot (-\cos x) dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

Применим формулу интегрирования по частям еще раз.

Пусть теперь $u = e^x$, $dv = \cos x dx$. Следовательно, $du = e^x dx$, $v = \int \cos x dx = \sin x$.

Для первоначального интеграла получаем следующее уравнение:

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + (e^x \sin x - \int e^x \sin x dx).$$

Решая это уравнение относительно неизвестного интеграла, находим

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x \text{ или } \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

Затем каждая подгруппа представляет свой выявленный (составленный) способ интегрирования по частям в неопределенном интеграле, и по итогам работы с метапланом получаем следующий обобщенный способ:

- 1) ввести новую переменную u ;
- 2) определить dv ;
- 3) найти du ;
- 4) вычислить v ;
- 5) составить разность $uv - \int v du$;

б) вычислить $\int v du$;

7) записать полный результат вычислений.

7. Этап первичного закрепления

Название этапа	Продолжительность, мин.	Деятельность преподавателя	Средства обучения	Деятельность студентов
Первичное закрепление	15	<ul style="list-style-type: none"> • организует первичное закрепление студентов нового способа действия интегрирования по частям в неопределенном интеграле при решении типовой задачи (задание 2); • организует взаимопроверку решения задания 2 в рабочих подгруппах в соответствии с критериями оценочного листа. 	карточки для групповой работы студентов; слайд 4 презентации	<ul style="list-style-type: none"> • групповое решение типовой задачи, на новый способ действия (задание 2); • взаимопроверка решения задания 2 соседней подгруппы в соответствии с критериями оценочного листа; • заполнения оценочного листа с учетом взаимопроверки подгрупп.

Задание 2: Выполни интегрирование по частям в неопределенном интеграле, опираясь на разработанный обобщенный способ действия (групповое решение типовой задачи).

$$\int (x + 1) e^{2x} dx$$

8. Этап самостоятельной работы с самопроверкой по эталону

Название этапа	Продолжительность, мин.	Деятельность преподавателя	Средства обучения	Деятельность студентов
Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону	10	<ul style="list-style-type: none"> • организует самостоятельную работу студентов по применению нового способа действия при решении типовой задачи (задание 3); • организует самопроверку самостоятельной работы студентов по 	карточки для индивидуальной работы студентов; слайд 5 презентации	<ul style="list-style-type: none"> • индивидуальное решение типовой задачи, на новый способ действия (задание 3); • самопроверка решения задания 3 по эталону в соответствии с критериями

		эталону (выработанный обобщенный способ интегрирования по частям в неопределенном интеграле) решения задания 3 в соответствии с критериями оценочного листа.		оценочного листа; •заполнений оценочного листа с учетом самопроверки.
--	--	--	--	--

Задание 3: Найдите первообразные, применяя разработанный обобщенный способ интегрирования по частям в неопределенном интеграле (каждый в группе индивидуально решает предложенные типовые задачи).

1) $\int (x + 3)e^x dx$;

2) $\int (x + 5) \cos x dx$;

3) $\int (x - 8)e^x dx$;

4) $\int (x - 9) \sin x dx$.

9. Этап включения в систему знаний и повторения

Название этапа	Продолжительность, мин.	Деятельность преподавателя	Средства обучения	Деятельность студентов
Включение в систему знаний и повторение	10	<ul style="list-style-type: none"> • организует групповую работу студентов по проверке предложенного решения (задание 4); • проверяет работу студентов по исправлению ошибки в решении задания 4 в соответствии с критериями оценочного листа; • раскрывает границы применимости нового способа. 	карточки для групповой работы студентов «Проверь решение!»; слайд 6 презентации	<ul style="list-style-type: none"> • групповой анализ предложенного решения типовой задачи (задание 4): поиск и исправление ошибки в решении типовой задачи, обоснование рассуждений; • заполнения оценочного листа с учетом проверки педагога; • выявление границы применимости нового способа.

Задание «Проверь решение!»

Задание 4: Изучите предложенное решение задачи в подгруппах. Если есть ошибка, исправьте её.

Задача: Вычислите $\int x \sin 7x dx$.

Решение: Для данного интеграла u и v выбираем в виде $u=x$, $dv=\sin 7x dx$.

Тогда $du=dx$, $v=\int \sin 7x dx = -\cos 7x$. По формуле получим

$$\begin{aligned} \int x \sin(7x) dx &= x(-\cos(7x)) + \int (-\cos(7x)) dx = \\ &= -x \cos(7x) - \int \cos(7x) dx = \\ &= -x \cos(7x) - \frac{1}{7} \sin(7x) + C. \end{aligned}$$

Ответ: $= -x \cos(7x) - \frac{1}{7} \sin(7x) + C$.

Границы применимости нового способа. По частям берутся интегралы следующих видов:

1) $\int \ln x dx$, $\int (x^2 + 3) \ln x dx$, $\int x \ln^2 x dx$ – логарифм или логарифм, умноженный на какой-нибудь многочлен.

2) $\int x e^x dx$, $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-2x} dx$ – экспоненциальная функция, умноженная на какой-нибудь многочлен.

3) $\int x \cos 6x dx$, $\int (x^2 + 3x) \sin 2x dx$, $\int x \tan^2 x dx$ – тригонометрические функции, умноженные на какой-нибудь многочлен.

4) $\int \arcsin x dx$, $\int x^2 \arctg x dx$ – обратные тригонометрические функции («арки»), «арки», умноженные на какой-нибудь многочлен.

Замечание: В некоторых случаях формулу интегрирования частями нужно применять неоднократно.

10. Этап рефлексии учебной деятельности на занятии

Название этапа	Продолжительность, мин.	Деятельность преподавателя	Средства обучения	Деятельность студентов
Рефлексия учебной деятельности на занятии	5	<ul style="list-style-type: none"> • акцентирует внимание на рассмотренных вопросах; • отвечает на вопросы студентов; • организует взаимопрос в рабочих подгруппах с помощью приема «Тонкие и толстые вопросы»; • подводит итоги расчета баллов в оценочных листах в соответствии с критериями оценки; • задаёт домашнее задание на подготовку к следующему занятию. 	оценочный лист и критерии оценки, дискуссия; слайд 7 презентации	<ul style="list-style-type: none"> • задают возникшие вопросы; • рефлексия и самооценка студентами собственной учебной деятельности и работы в подгруппах на занятии; • получают домашнее задание.

«Тонкие» вопросы – вопросы, требующие однословного ответа. «Толстые» вопросы – вопросы, требующие размышления, привлечения дополнительных знаний, умения анализировать.

Тонкие ?	Толстые ?
может... мог ли... согласны ли вы...	дайте объяснение, почему... в чем разница... предположите, что будет, если...

Домашнее задание: Стоит заметить, что объем работы, который выполняет автор в раздаточном материале, на данном занятии все же не найден. Чему численно равен объем его работы, является домашним заданием для студентов (все необходимые теоретические факты им уже известны и данные задания известны также, осталось применить формулу Ньютона-Лейбница и получить ответ).

ОЦЕНОЧНЫЙ ЛИСТ

№п/п	Фамилия, имя студента	Баллы				Всего баллов
		Способ	Задание 1	Задание 2	Задание 3	

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

Баллы	ЗАДАНИЯ				
	Способ	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4
2	Выработан полный способ действия	Задание решено верно	Задание решено правильно	Найдена и правильно исправлена ошибка	Задание решено верно
1	Ошибки в формулировке этапов способа действий	Допущена 1 ошибка		Ошибка найдена, но не исправлена	Допущена 1 ошибка
0	Способ действий определен неправильно	Допущено 2 и более ошибок	Задание решено неправильно	Ошибка найдена	Допущено 2 и более ошибок