Теория функции комплексного переменного в настоящее время – одна из наиболее развитых и тщательно разработанных ветвей классической математики. Как известно, она начала развиваться в XVIII веке. Большой вклад в ТФКП и её приложения внесли такие известные российские ученые, как Б.В. Шабат, А.И. Маркушевич, Е.Д. Соломенцев и многие другие.

В большинстве случаев методами комплексного анализа легко решаются несобственные интегралы - по бесконечному промежутку либо от неограниченных на отрезке интегрирования функций. В данной работе рассматриваются интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{R(x)cos\alpha xdx}, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{R(x)sin\alpha xdx}, \tag{2}$$

где $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ – рациональная функция, причем $Q(x)$ не имеет действительных корней и степень $Q(x)$, по крайней мере, на единицу больше степени $P(x)$. Для решения данного вида интегралов используют лемму Жордана [2, стр. 88].

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в верхней полуплоскости $Imz \geq 0$, за исключением конечного числа полюсов, не лежащих на действительной оси, и стремится к нулю при $z \to \infty$ в верхней полуплоскости, тогда в силу леммы Жордана

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left[f(z) e^{i\alpha z}\right], \qquad \alpha > 0.$$

Из последней формулы, при условии, что $f(z)$ на действительной оси принимает действительные значения, следует:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) cos\alpha x dx = Re\left[2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k}\left(R(z)e^{i\alpha z}\right)\right], \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) sin\alpha x dx = Im\left[2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k}\left(R(z)e^{i\alpha z}\right)\right]. \qquad (4)$$

При вычислении несобственных интегралов вида (3) и (4) можно использовать следующий алгоритм:

1) Показываем, что знаменатель $Q(x)$ не обращается в нуль на действительной оси и что его степень по крайней мере на одну единицу больше степени многочлена $P(x)$;

2) Переходим к функции комплексной переменной

$$R(x) sin\alpha x = R(z)e^{\alpha iz},$$
$$R(x) cos\alpha x = R(z)e^{\alpha iz},$$

3) Находим комплексные корни многочлена $Q(z)$, которые являются полюсами функции $R(z)$;

4) Из найденных полюсов функции $R(z)$ выбираем только те, которые лежат в верхней полуплоскости;

5) Вычисляем вычеты $\operatorname*{res}_{z=z_k} R(z)$ по формуле для вычисления вычета относительно полюса порядка $n \geq 1$ [1, стр. 206].

6) По формуле (3) или (4) вычисляем данный интеграл.

Рассмотрим примеры, непосредственно относящиеся к теме исследования.

Пример 1. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{cosxdx}{x^2 + a^2}, a > 0.$$

Решение. В данном примере под знаком интеграла стоит четная функция, следовательно, имеет место равенство

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{cosxdx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cosxdx}{x^2 + a^2}$$

Заметим, что интеграл, стоящий в правой части, вида (1). Для вычисления этого интеграла будем использовать рассмотренный выше алгоритм.

Степень числителя на 2 единицы меньше степени знаменателя и знаменатель не равен нулю для любого действительного x.

Перейдем к функции комплексного переменного

$$\frac{cosx}{x^2+a^2}=\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}.$$

Рассмотрим функцию

$$R(z)=\frac{1}{z^2+a^2}=\frac{1}{(z-ai)(z+ai)}.$$

Данная функция $R(z)$ имеет две особых точки $z_1=ai$ и $z_2=-ai$. Причем в верхней полуплоскости находится только простой полюс в точке z_1. Найдем вычет функции в этой точке

$$\underset{z=ai}{res}\frac{e^{iz}}{(z-ai)(z+ai)}=\lim_{z\to ai}\frac{e^{iz}}{z+ai}=\frac{e^{-a}}{2ai}$$

Отсюда, используя формулу (3), находим значение интеграла

$$\int_0^{+\infty}\frac{cosxdx}{x^2+a^2}=\frac{1}{2}Re\left[2\pi i\frac{e^{-a}}{2ai}\right]=\frac{\pi e^{-a}}{2a}.$$

Пример 2. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)sinx}{x^2-2x+2}dx.$$

Решение. Заметим, что данный интеграл вида (2). А, следовательно, решаем его с помощью рассмотренного выше алгоритма.

Степень числителя на 1 единицу меньше степени знаменателя и $x^2-2x+2\neq 0$ для любого действительного x.

Перейдем к функции комплексного переменного

$$\frac{(x+1)sinx}{x^2-2x+2}=\frac{(z+1)e^{iz}}{z^2-2z+2}$$

Рассмотрим функцию

$$R(z)=\frac{z+1}{z^2-2z+2}=\frac{z+1}{(z-1-i)(z-1+i)}.$$

Функция $R(z)$ имеет в верхней полуплоскости один простой полюс в точке $z_1 = 1 + i$. Найдем вычет функции в этой точке

$$\underset{z=1+i}{res} \frac{(z+1)e^{iz}}{z^2 - 2z + 2} = \lim_{z \to 1+i} \frac{(z+1)e^{iz}}{z - 1 + i} = \frac{(2+i)e^{i-1}}{2i}.$$

Отсюда, используя формулу (4), находим значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)sinx}{x^2 - 2x + 2} dx = Im\left[2\pi i \frac{(2+i)e^{i-1}}{2i}\right] = Im\left[\pi(2+i)e^{-1} \cdot e^{i}\right] =$$

$$= Im[\pi(2+i)e^{-1}(cos1 + isin1)] = \pi e^{-1}(2sin1 + cos1).$$