Разноуровневый подход к обучению координатно-параметрическому методу решения задач с параметрами

Шилкина Оксана Владимировна
Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) ФГБОУ ВО "Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)"

Аннотация. В статье обоснована необходимость учета разных уровней сложности в использовании координатно-параметрического метода решения задач с параметрами и целесообразность разноуровневого подхода к обучению решению задач указанным методом.

Ключевые слова: задачи с параметром, методы решения, уровни сложности.

Координатно-параметрический метод решения задач с параметрами относится к достаточно мощному методу, применимому к широкому классу указанных задач.

Он основан на нахождении множества всех точек координатно-параметрической плоскости, значения координаты x и параметра a, каждой из которых, удовлетворяют заданному в условиях задачи условию (соотношению).

Если указанное множество точек найдено, то можно каждому допустимому значению параметра $a = const$ поставить в соответствие координаты x точек этого множества, дающие искомое решение задачи, или указать те значения параметра, при которых задача не имеет решения.

Рассмотрим соотношение

$$F(x,a) \vee 0 \qquad (1)$$

где значок $\vee$ обозначает один из знаков: $=, <, >, \leq, \geq$, а $F(x,a)$ — некоторая функция переменной x и числового параметра a.

Пусть на координатно-параметрической плоскости xOa найдено множество всех точек, значения координаты которых удовлетворяют рассматриваемому соотношению.

Тогда каждому допустимому фиксированному значению параметра a можно поставить в соответствие значения искомой величины x — координаты соответствующих точек найденного множества.

В зависимости от поставленной задачи дается ответ. В ответе могут указываться либо значения параметра, при которых решение уравнения или неравенства удовлетворяет определенным требованиям, либо значения переменной x при заданных (или допустимых) значениях параметра.

Следует отметить, что в рассматриваемом координатно-параметрическом методе центральное место занимает нахождение множества всех точек координатно-параметрической плоскости, определяемых соотношением (1).

В случае, когда соотношение (1) является уравнением, таким множеством является график этого уравнения.

В случае, когда соотношение (1) является неравенством, то для нахождения множества точек координатно-параметрической плоскости, удовлетворяющих неравенству применяется так называемый метод частичных областей, использование которого во многом аналогично применению метода интервалов для решения неравенств с одной неизвестной.

Кроме того, нахождение множества всех точек координатно-параметрической плоскости, определяемых соотношением (1), как правило, требует равносильных преобразований этого соотношения.

Таким образом, можно выделить два этапа при реализации координатно-параметрического метода:

1. Нахождение множества всех точек координатно-параметрической плоскости, определяемых соотношением (1).

2. Установление соответствия между значениями параметра и переменной с использованием чертежа (т.е. снятие с чертежа необходимой информации) и запись ответа на поставленный в задаче вопрос.

Анализ задач с применением координатно-параметрического метода, построенном как на личном опыте, так и на основных принципах передового педагогического опыта, показал, что:

1. В контрольно-измерительных материалах ЕГЭ по математике представлены задачи с использованием координатно-параметрического метода высокого уровня сложности.
2. Можно выделить разные уровни сложности использования координатно-параметрического метода.
3. Разноуровневость в решениях задач с использованием координатно-параметрического метода требует разработки разноуровневого подхода к обучению учащихся использованию координатно-параметрического метода.

Данная статья посвящена выделению уровней сложности использования координатно-параметрического метода и выделению основных этапов работы как с методом в целом, т.е. на любом этапе обучения, так и специфических уровней внутри этапа.

Для этого выделим уровни сложности в использовании координатно-параметрического метода.

На этапе нахождения множества всех точек координатно-параметрической плоскости, определяемых соотношением $F(x,a)\vee 0$ уровень сложности заданий определяется следующими факторами:

–необходимостью разложения выражения $F(x,a)$ (а в случае, когда $F(x,a)$ является дробью, числителя и знаменателя этого выражения) на множители и способа разложения;

–необходимостью производить равносильные преобразования исходного соотношения;

–структурой области определения функции $F(x,a)$;

–видами линий (прямая, кривая второго порядка, график элементарной функции), объединением которых является график уравнения $F(x,a)=0$, или ограничивающих область определения функции $F(x,a)$.

На этапе установления соответствия между значениями параметра и переменной с использованием чертежа и записи ответа на поставленный в задаче вопрос сложность заданий определяется следующими факторами:

–количеством линий в графике $F(x,a)=0$ и их взаимным расположением (чем больше линий и точек пересечения, тем больше случаев в «расслоении» решения по параметру);

–наличием «выколотых» точек на графике и статусом граничных точек в случае областей (принадлежат или не принадлежат граничные точки множеству), так как наличие граничных точек, не принадлежащих множеству порождает особые случаи в решении;

Понятно, что все перечисленные факторы в задачах могут достаточно сложно переплетаться, и классификация по сложности может носить только условный характер. Для создания системы задач, определим следующие уровни сложности:

1. Функция $F(x,a)$ является произведением двух линейных сомножителей, каждый из которых содержит только одну переменную.

Область определения функции $F(x,a)$ - вся плоскость.

График уравнения $F(x,a)=0$ - пара прямых параллельных осям координат (т.е. взаимно параллельных или взаимно перпендикулярных).

2. Функция $F(x,a)$ раскладывается в произведение двух линейных сомножителей, каждый из которых содержит только одну переменную.

Область определения функции $F(x,a)$ - вся плоскость.

График уравнения $F(x,a)=0$ - пара прямых параллельных осям координат (параллельных или перпендикулярных).

3. Функция $F(x,a)$ раскладывается в произведение двух линейных сомножителей, хотя бы один из которых содержит обе переменные.

Область определения функции $F(x,a)$ - вся плоскость.

График уравнения $F(x,a)=0$ - пара прямых, хотя бы одна не параллельна осям координат.

4. $F(x,a)$ - дробно-линейная функция.

Область определения функции $F(x,a)$ - вся плоскость за исключением прямой, определяемой знаменателем.

График уравнения $F(x,a)=0$ - прямая (возможно с выколотой точкой).

5. Функция $F(x,a)$ раскладывается в произведение трех линейных сомножителей.

Область определения функции $F(x,a)$ - вся плоскость.

Графиком уравнения $F(x,a)=0$, являются три прямые (пересекающиеся в одной точке; параллельные; две параллельные и пересекаются третьей; пересекающиеся, но не в одной точке).

6. $F(x,a)$ - дробно-рациональная функция.

Область определения функции $F(x,a)$ - вся плоскость за исключением прямых, определяемых знаменателем.

Графиком уравнения $F(x,a)=0$ является объединение прямых с выколотыми точками.

7. Функция $F(x,a)$ раскладывается в произведение сомножителей: линейных и квадратичных вида $(a+px^2+qx+s)$, $(x+pa^2+qa+s)$.

Область определения функции $F(x,a)$ - вся плоскость.

Графиком уравнения $F(x,a)=0$ является объединение прямых и парабол.

8. $F(x,a)$ - дробно-рациональная функция, числитель и знаменатель которой раскладываются в произведение сомножителей: линейных и квадратичных вида $(a+px^2+qx+s)$, $(x+pa^2+qa+s)$.

Область определения функции $F(x,a)$ - вся плоскость за исключением прямых и парабол, определяемых знаменателем.

Графиком уравнения $F(x,a)=0$ является объединение прямых и парабол с выколотыми точками.

9. Функция $F(x,a)$ раскладывается в произведение сомножителей: линейных и квадратичных приводимых к виду $((x-p)^2+(a-q)^2-r^2)$.

Область определения функции $F(x,a)$ - вся плоскость.

Графиком уравнения $F(x,a)=0$ является объединение окружностей и прямых.

10. $F(x,a)$ - дробно-рациональная функция, числитель и знаменатель которой раскладываются в произведение сомножителей: линейных и квадратичных приводимых к виду $((x-p)^2+(a-q)^2-r^2)$.

Область определения функции $F(x,a)$ - вся плоскость за исключением прямых и окружностей, определяемых знаменателем.

Графиком уравнения $F(x,a)=0$ является объединение прямых и окружностей с выколотыми точками.

Определим структуру системы задач по теме «Координатно-параметрический метод». Предлагаемая система задач разработана в соответствии с методикой обучения координатно-параметрическому методу, предложенному кандидатом физико-математических наук, доцентом Ляховой Н.Е. [2]. Как показал обзор литературы, посвященной изложению координатно-параметрического метода, авторы, изложив суть метода, переходят к рассмотрению примеров решения задач указанным методом. В лучшем случае [1] задачи классифицируются по принципу: уравнение или неравенство фигурирует в условии задачи и какие виды функций они содержат (рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические и другие).

Такое обучение методу подходит лишь для хорошо подготовленного читателя, но не подходит для рядового школьника. Поэтому для изучения координатно-параметрического метода в средней школе необходимо придерживаться другого подхода.

Как следует из описания координатно-параметрического метода, процесс обучения методу можно разделить на три этапа.

Этап А. Обучение нахождению множества всех точек координатно-параметрической плоскости, определяемых соотношением $F(x,a)\vee 0$.

Обучение нахождению множества всех точек координатно-параметрической плоскости, определяемых соотношением $F(x,a)\vee 0$. В рамках этого этапа рассматриваются два шага: построение графиков уравнений и нахождение областей, задаваемых неравенством.

В рамках этого этапа можно выделить два шага:

A_1. Обучение решению задач вида: «Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых (x,a) удовлетворяют уравнению $F(x,a)=0$, то есть построить график заданного уравнения».

A_2. Обучение решению задач вида: «Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых (x,a) удовлетворяют неравенству $F(x,a)\vee 0$ ». Выполнение этого шага предполагает: выполнение шага A_1 (построить график уравнения $F(x,a)=0$) и определение знака функции в каждой полученной области (метод областей).

Этап В. Выработка умений устанавливать соответствие между допустимым фиксированным значением параметра a и значениями искомой величины x — координаты соответствующих точек заданного множества. На этом этапе вырабатываются навыки снятия информации с готового чертежа. На этом этапе также можно выделить четыре шага:

B_1. Заданное множество – объединение линий и точек. Выработка навыков по множеству значений x, удовлетворяющему условиям задачи, находить значения параметра.

B_2. Заданное множество – объединение линий и областей. Выработка навыков по множеству значений x, удовлетворяющему условиям задачи, находить значения параметра.

В$_3$. Заданное множество – объединение линий и точек. Выработка навыков для каждого значения параметра находить соответствующее ему множество значений переменной *x*.

В$_4$. Заданное множество – объединение линий и областей. Выработка навыков для каждого значения параметра находить соответствующее ему множество значений переменной *x*.

Этап С. Обучение непосредственно решению задач с параметром координатно-параметрическим методом. На этом этапе происходит соединение этапов А и В, то есть поставленная задача с параметром рассматривается полностью от условия до ответа. Именно этот этап хорошо представлен литературой по задачам с параметрами.

Предлагаемая обучающая система задач строиться по принципу матрицы, элементами которой являются блоки заданий. Для обозначения блоков используются обозначения A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}. Буквы *A, B, C* соответствуют этапам обучения. Каждый блок имеет двойную нумерацию. Первый индекс обозначает номер шага в соответствующем этапе реализации координатно-параметрического метода. Второй индекс обозначает уровни сложности.

Уровни сложности →

Этапы реализации метода ↓

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A_{11}.	A_{12}.	A_{13}.	A_{14}.	A_{15}.	A_{16}.	A_{17}.	A_{18}.	A_{19}.	A_{110}.
	A_{21}.	A_{22}.	A_{23}.	A_{24}.	A_{25}.	A_{26}.	A_{27}.	A_{28}.	A_{29}.	A_{210}.
B	B_{11}.	B_{12}.	B_{13}	B_{14}	B_{15}	B_{16}	B_{17}	B_{18}	B_{19}	B_{110}
	B_{21}.	B_{22}	B_{23}	B_{24}	B_{25}	B_{26}	B_{27}	B_{28}	B_{29}	B_{210}
	B_{31}.	B_{32}.	B_{33}.	B_{34}.	B_{35}.	B_{36}.	B_{37}.	B_{38}.	B_{39}.	B_{310}.
	B_{41}.	B_{42}.	B_{43}.	B_{44}.	B_{45}.	B_{46}.	B_{47}.	B_{48}.	B_{49}.	B_{410}.
C	C_{11}.	C_{12}.	C_{13}.	C_{14}.	C_{15}.	C_{16}.	C_{17}.	C_{18}.	C_{19}.	C_{110}.

Приведем примеры заданий. Все задания первой строки матрицы имеют следующую формулировку:

A_1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых (x,a) удовлетворяют уравнению $F(x,a)=0$. При этом функция $F(x,a)$ меняется в зависимости от выбранного уровня сложности. Так, например блок A_{11} может содержать следующие задания..

1. $F(x,a)=(x-1)(a+2).$
2. $F(x,a)=(x-1)^3(a+2)^2.$
3. $F(x,a)=(x-1)(x+2)(a^2-2a+2).$
4. $F(x,a)=(a+5)^2(a-3)(x^2+1).$

Все задания второй строки имеют следующую формулировку:

A_2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых (x,a) удовлетворяют неравенству $F(x,a)>0;\, F(x,a)\le 0,$ если:

A_{21}. $F(x,a)=(x+2)^2(4-a)^3.$

A_{23}. $F(x,a)=a^2-2x-2a+xa.$

A_{26}. $F(x,a)=\dfrac{(x-a)^2(x^2-(a+1)^2)(x-a+1)}{(x+a)^4}.$

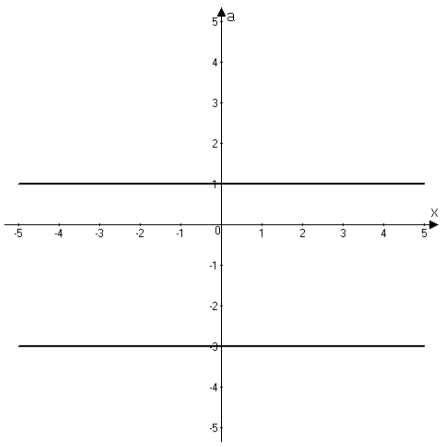
A_{27}. $F(x,a)=(x^2-a-1)(x^2-a^2).$

A_{210}. $F(x,a)=\dfrac{(x-2)^2+a^2-9}{(x-2)^4}.$

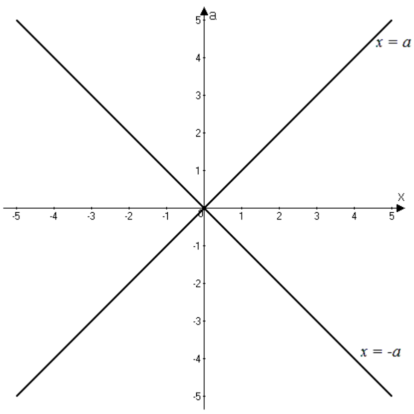
Все задания третьей строки имеют следующую формулировку:

B_1. На рисунке изображен график уравнения $F(x,a)=0$. Для каждого значения переменной a укажите всевозможные значения переменной x такие, что точка с координатами (x,a) принадлежит указанному графику.

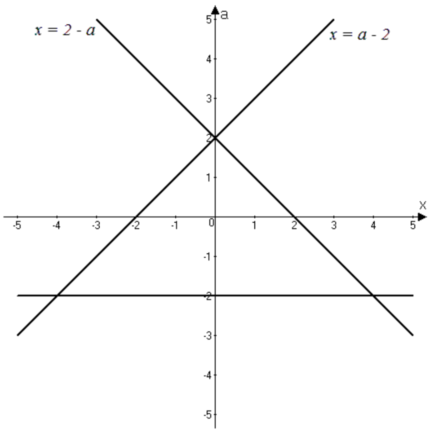
B_{11}.



B_{13}.



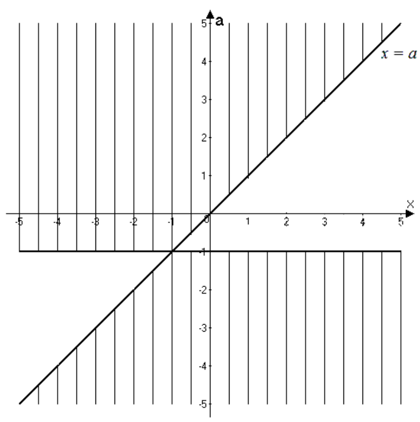
B_{15}.



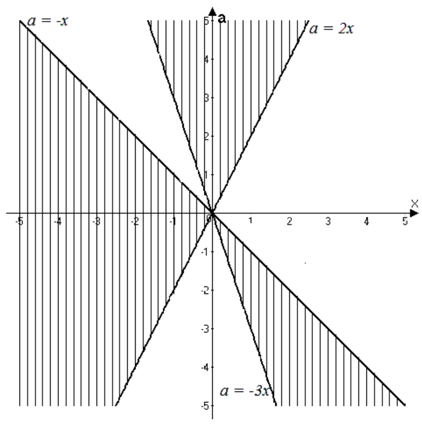
Все задания четвертой строки имеют следующую формулировку:

B_2 На рисунке изображено множество точек, удовлетворяющее соотношению $F(x,a) \vee 0$. Для каждого значения переменной a укажите всевозможные значения переменной x такие, что точка с координатами (x,a) принадлежит указанному множеству.

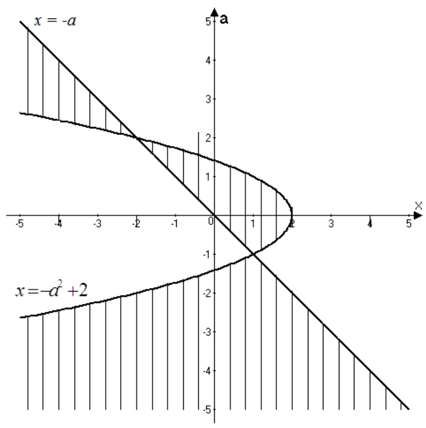
B_{23}.



B_{25}.



B27.



C11. Для каждого значения параметра *a* решить уравнение

$$(x+1)(a-3)=0.$$

C12. Для каждого значения *a* решить неравенство

$$(x-a)(x-2)\le 0.$$

C13. При каких значениях параметра *a* уравнение

$$x^2+ax-x-a=0.$$

имеет один корень.

C14. Для каждого значения параметра *a* решить неравенство

$$\frac{x-a}{x+2}\le 0.$$

C17. Для каждого значения параметра *a* решить неравенство

$$x^2+2x-a\ge 0.$$

Результаты данной статьи и анализ приведенных примеров показывают, во-первых, необходимость учета разных уровней сложности в использовании координатно-параметрического метода, а во-вторых, важность и целесообразность разработки разноуровневого подхода к обучению решению задач при помощи координатно-параметрического метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моденов, В. П. Задачи с параметрами. Координатно-параметрический метод: учебное пособие / В.П. Моденов. — М.: Издательство «Экзамен», 2007.

2. Ляхова Н.Е., Яковенко И.В. Методы решения уравнений и неравенств в задачах с параметрами: учеб. пособие/Н.Е.Ляхова, И.В.Яковенко; отв.ред. проф. А.А.Илюхин. – Таганрог: Изд-во Таганрог. ин-та имени А.П.Чехова, 2014.